Bestimmung des Grenzwertes für das Produkt der Hauptkoefficienten in reducierten quadratischen quaternären Formen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

genehmigt von der

hohen philosophischen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

und

mit den beigefügten Thesen öffentlich verteidigt

im August 1894

von

J. Peter Bauer

aus Köln.

Bonn,

Universitäts-Buchdruckerei von Carl Georgi.

1894.

Als Grenzwert für das Produkt der Hauptkoefficienten in reducierten quadratischen ternären Formen bestimmte Seeber[1]) die dreifache Determinante der Form. In der Ankündigung des Werkes von Seeber stellt Gauss[2]) eine Identität auf, derzufolge sofort einleuchtet, dass der Wert jenes Produktes nicht grösser als die doppelte Determinante der Form sei. Diesen Grenzwert fanden auf andere Weise späterhin noch die Herren Hermite[3]), Korkine und Zolotareff[4]). In einem Briefe an Borchardt, von welchem ein Auszug im 79. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik erschien, giebt Herr Hermite ein Verfahren an, welches keineswegs die Einfachheit des Beweises besitzt, wie sie die Gauss'sche Identität bietet, welches sich aber anwenden lässt, um in reducierten quadratischen quaternären Formen die vierfache Determinante als Grenzwert für das Produkt der Hauptkoefficienten zu bestimmen. Mit Hülfe des gedachten Verfahrens werde ich im Folgenden diese Bestimmung vornehmen.

Hierbei benutze ich als Bedingungen dafür, dass die quadratische quaternäre Form

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4$$

eine reducierte Form sei, diejenigen, welche Herr Minkowski[5]) nach der Definition des Herrn Hermite aufgestellt

---

[1]) Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen.

[2]) Gauss Werke II.

[3]) Journal für reine und angewandte Mathematik, B. 40 und 79.

[4]) Mathematische Annalen.

[5]) Comptes rendus vom April 1883.

hat. In dessen Aufsatz „über positive quadratische Formen[1]) lauten selbige: Die Form $F=\sum_1^n a_{ik}x_ix_k$ ist immer dann und nur dann eine positive und reducierte, wenn sie den Ungleichungen

$$a_{11}\leqq a_{22}\leqq a_{33}\leqq a_{44}$$

und $$F(m_1, m_2, m_3, m_4)\geqq a_{ii}$$

genügt, wo die m_h folgender Tabelle gemäss zu wählen sind:

m_i	$\pm m_{i'}$	$\pm m_{i''}$	$\pm m_{i'''}$
	1	0	0
1	1	1	0
	1	1	1

Diese Bedingungen stimmen vollständig überein mit folgenden:

(1) $$0<a_{11}\leqq a_{22}\leqq a_{33}\leqq a_{44}.$$

(2) $$a_{\mu'\mu'}-2a_{\mu\nu}\geqq 0.$$

(3) $$a_{\mu'\mu'}+2a_{\mu\nu}\geqq 0.$$

(4) $$a_{\mu'\mu'}+a_{\nu'\nu'}+2a_{\mu\nu}+2a_{\nu\varrho}+2a_{\varrho\mu}\geqq 0.$$

(5) $$a_{\mu'\mu'}+a_{\nu'\nu'}+2a_{\mu\nu}-2a_{\nu\varrho}-2a_{\varrho\mu}\geqq 0.$$

(6) $a_{11}+a_{22}+a_{33}+2a_{12}+2a_{13}+2a_{14}+2a_{23}+2a_{24}+2a_{34}\geqq 0.$

(7) $a_{11}+a_{22}+a_{33}+2a_{\mu\nu}+2a_{\nu\varrho}+2a_{\varrho\mu}-2a_{\sigma\mu}-2a_{\sigma\nu}-2a_{\sigma\varrho}\geqq 0.$

(8) $a_{11}+a_{22}+a_{33}+2a_{\mu\nu}+2a_{\varrho\sigma}-2a_{\mu\varrho}-2a_{\mu\sigma}-2a_{\nu\varrho}-2a_{\nu\sigma}\geqq 0,$

in denen μ, ν, ϱ, σ untereinander verschieden die Zahlen 1, 2, 3, 4 darstellen; in (2) und (3) ist μ' die kleinste der Zahlen μ, ν; in (4) und (5) sind μ' und ν' die beiden kleinsten unter den Zahlen μ, ν, ϱ. Ferner ist in diesen Ungleichungen, wie überhaupt fernerhin,

$$a_{\varkappa\lambda}=a_{\lambda\varkappa}.$$

Genannte Bedingungen gelten allgemein für Formen mit reellen Koefficienten. Ueberhaupt brauchen die Koefficienten der Formen, welche Gegenstand dieser Arbeit sind, nicht notwendiger Weise ganze, sondern nur reelle Zahlen zu sein. Alle Koefficienten mit verschiedenen Indices

[1]) Journal für reine und angewandte Mathematik, B. 99.

werden als variabele, alle mit gleichen Indices als konstante Grössen behandelt.

Bezeichnen von nun ab $\varkappa$ und λ zwei verschiedene von den Zahlen 1, 2, 3, 4, so kann man die reducierten quadratischen quaternären Formen unterscheiden je nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden positiven Koefficienten $a_{\varkappa\lambda}$. Durch geeignete Substitutionen lassen sich aber alle jene Formen auf den einen Fall zurückführen, dass in der transformierten äquivalenten Form drei von den Koefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ positiv, die anderen drei negativ sind.

Diese Substitutionen sind für eine Form

$$\begin{aligned} H = {} & a_{\alpha\alpha}x_\alpha^2 + a_{\beta\beta}x_\beta^2 + a_{\gamma\gamma}x_\gamma^2 + a_{\delta\delta}x_\delta^2 \\ & + 2a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta + 2a_{\alpha\gamma}x_\alpha x_\gamma + 2a_{\alpha\delta}x_\alpha x_\delta \\ & + 2a_{\beta\gamma}x_\beta x_\gamma + 2a_{\beta\delta}x_\beta x_\delta + 2a_{\gamma\delta}x_\gamma x_\delta, \end{aligned}$$

wenn alle sechs Koefficienten $a_{\alpha\beta}$ positiv, oder alle sechs negativ sind,

$$x_\alpha = -x'_\alpha,\ x_\beta = x'_\beta,\ x_\gamma = x'_\gamma,\ x_\delta = x'_\delta;$$

wenn fünf Koefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ positiv und nur einer negativ, oder wenn fünf negativ und einer positiv sind, und $a_{\alpha\beta}$ dieser eine positive resp. negative ist,

$$x_\alpha = -x'_\alpha,\ x_\beta = x'_\beta,\ x_\gamma = -x'_\gamma,\ x_\delta = x'_\delta;$$

wenn vier Koefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ positiv und zwei negativ, oder wenn vier negativ und zwei positiv sind,

$$x_\alpha = x'_\alpha,\ x_\alpha = -x'_\beta,\ x_\gamma = x'_\gamma,\ x_\delta = x'_\delta,$$

sowohl wenn $a_{\alpha\beta}$ und $a_{\alpha\gamma}$, als auch wenn $a_{\alpha\beta}$ und $a_{\gamma\delta}$ die beiden positiven oder negativen sind.

Die zwanzig Formen, in denen drei Koefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ positiv, die anderen drei negativ sind, zerfallen in drei Gruppen, je nachdem

1) $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\gamma}$, $a_{\alpha\delta}$ positiv und $a_{\beta\gamma}$, $a_{\gamma\delta}$, $a_{\delta\beta}$ negativ,

2) $a_{\beta\gamma}$, $a_{\gamma\delta}$, $a_{\delta\beta}$ „ „ $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\gamma}$, $a_{\alpha\delta}$ „

3) $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\gamma}$, $a_{\beta\delta}$ „ „ $a_{\delta\gamma}$, $a_{\delta\alpha}$, $a_{\gamma\beta}$ „

sind. Die vier Formen der ersten, sowie die der zweiten Gruppe werden durch je eine der Substitutionen

$$x_1 = x_1', \; x_2 = \; x_2', \; x_3 = \; x_3', \; x_4 = \; x_4',$$
$$x_1 = x_1', \; x_2 = -x_2', \; x_3 = -x_3', \; x_4 = -x_4',$$
$$x_1 = x_1', \; x_2 = -x_2', \; x_3 = \; x_3', \; x_4 = -x_4',$$
$$x_1 = x_1', \; x_2 = -x_2', \; x_3 = -x_3', \; x_4 = \; x_4'$$

in eine äquivalente Form transformiert, in welcher

a_{12}, a_{13}, a_{14} positiv und a_{23}, a_{24}, a_{34} negativ

resp. a_{23}, a_{24}, a_{34} „ „ a_{12}, a_{13}, a_{14} „

sind. Ferner gehen durch die Substitution

$$x_\alpha = -x_\alpha', \; x_\beta = -x_\beta', \; x_\gamma = x_\gamma', \; x_\delta = x_\delta'$$

je zwei von den zwölf Formen der dritten Gruppe, nämlich diejenigen, für welche die Koefficienten

$a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\gamma}$, $a_{\beta\delta}$ positiv und $a_{\gamma\delta}$, $a_{\gamma\beta}$, $a_{\delta\alpha}$ negativ

und $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\delta}$, $a_{\beta\gamma}$ „ „ $a_{\gamma\delta}$, $a_{\gamma\alpha}$, $a_{\delta\beta}$ „

sind, in einander über, so dass in dieser Gruppe nur sechs wesentlich verschiedene Fälle verbleiben.

Im Ganzen bleibt demnach zu unterscheiden:

I.	$a_{12} \geqq 0$,	$a_{13} \geqq 0$,	$a_{14} \geqq 0$,	$a_{23} \leqq 0$,	$a_{24} \leqq 0$,	$a_{34} \leqq 0$,
II.	$a_{12} \leqq 0$,	$a_{13} \leqq 0$,	$a_{14} \leqq 0$,	$a_{23} \geqq 0$,	$a_{24} \geqq 0$,	$a_{34} \geqq 0$,
III.	$a_{12} \geqq 0$,	$a_{13} \geqq 0$,	$a_{14} \leqq 0$,	$a_{23} \leqq 0$,	$a_{24} \geqq 0$,	$a_{34} \leqq 0$,
IV.	$a_{12} \geqq 0$,	$a_{13} \geqq 0$,	$a_{14} \leqq 0$,	$a_{23} \leqq 0$,	$a_{24} \leqq 0$,	$a_{34} \geqq 0$,
V.	$a_{12} \geqq 0$,	$a_{13} \leqq 0$,	$a_{14} \geqq 0$,	$a_{23} \leqq 0$,	$a_{24} \leqq 0$,	$a_{34} \geqq 0$,
VI.	$a_{12} \leqq 0$,	$a_{13} \leqq 0$,	$a_{14} \geqq 0$,	$a_{23} \geqq 0$,	$a_{24} \leqq 0$,	$a_{34} \geqq 0$,
VII.	$a_{12} \leqq 0$,	$a_{13} \leqq 0$,	$a_{14} \geqq 0$,	$a_{23} \geqq 0$,	$a_{24} \geqq 0$,	$a_{34} \leqq 0$,
VIII.	$a_{12} \leqq 0$,	$a_{13} \geqq 0$,	$a_{14} \leqq 0$,	$a_{23} \geqq 0$,	$a_{24} \geqq 0$,	$a_{34} \leqq 0$.

Will man unter jeder dieser Voraussetzungen die aus den Bedingungen (1) bis (8) resultierenden grössten und kleinsten Werte der Koefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ bestimmen und beobachtet hierbei folgende Reihenfolge

$$a_{12}, \; a_{13}, \; a_{14}, \; a_{23}, \; a_{24}, \; a_{34},$$

so kommen für a_{12}, a_{13} und a_{14} nur die Bedingungen (2) und (3) in Betracht, und somit sind deren Grenzwerte 0 und $\pm \frac{a_{11}}{2}$. Zur Bestimmung der Grenzwerte von a_{23} und a_{24} dienen in erster Linie wieder die Bedingungen (2) und (3), und jene sind dann 0 und $\pm \frac{a_{22}}{2}$. Nur wenn von den

Koefficienten a_{12}, a_{13}, a_{23} oder a_{12}, a_{14}, a_{24} einer und nur einer negativ ist, existieren infolge der Bedingungen (5) für a_{23} resp. a_{24} die Grenzwerte 0 und $\pm\frac{a_{22}-a_{11}}{2}$. Von den Bedingungen (4) findet nur die eine

$$a_{22}+a_{33}+2a_{23}+2a_{24}+2a_{34}\geqq 0$$

zur Bestimmung der Grenzwerte 0 und $-\frac{a_{33}-a_{22}}{2}$ von a_{34} Anwendung, und zwar nur unter I., weil unter keiner der übrigen Voraussetzungen drei negative $a_{\varkappa\lambda}$ vorkommen, deren Indices sich zu einem Cyklus anordnen lassen. Überhaupt ergeben sich auch für a_{34} die grössten und kleinsten Werte im Allgemeinen aus den Bedingungen (2) bis (5) und sind dann 0 und $\pm\frac{a_{33}}{2}$ oder 0 und $\pm\frac{a_{33}-a_{11}}{2}$ oder 0 und $\pm\frac{a_{33}-a_{22}}{2}$. Letztere treten durchschnittlich selbst dann noch auf, wenn sie durch (7) oder (8) bestimmt werden. Die Bedingung (6) ist unter Voraussetzung I. immer schon durch (4), unter den übrigen Voraussetzungen durch (2) erfüllt. Aus (7) und (8) können für a_{34} auch die Grenzwerte 0 und $\pm\frac{a_{33}-(a_{11}+a_{22})}{2}$ hervorgehen; z, B. wenn man unter I. in (7) $\sigma=1$, $\mu=2$, $\nu=3$, $\varrho=4$ nimmt und für a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24} beziehungsweise die Grenzwerte $0, \frac{a_{11}}{2}, \frac{a_{11}}{2}, -\frac{a_{22}}{2}, -\frac{a_{22}}{2}$ setzt. Infolge der nämlichen Bedingung kann schliesslich noch der Fall eintreten, dass beide Grenzwerte von a_{34} von Null verschieden sind, dann aber dasselbe Vorzeichen haben. Ein Beispiel hierfür bietet unter II. die Substitution $a_{12}=0$, $a_{13}=-\frac{a_{11}}{2}$, $a_{14}=-\frac{a_{11}}{2}$, $a_{23}=\frac{a_{22}}{2}$, $a_{24}=\frac{a_{22}}{2}$ in (7), worin $\varrho=1$, $\sigma=2$, $\mu=3$, $\nu=4$ gesetzt sei. Hierdurch erhält man für a_{34} die Grenzwerte 0 und $\frac{a_{33}}{2}$ oder $\frac{a_{11}+a_{22}-a_{33}}{2}$ und $\frac{a_{33}}{2}$, je nachdem man $a_{33}\geqq a_{11}+a_{22}$ oder $a_{33}<a_{11}+a_{22}$ annimmt. Wie in diesem Beispiele, so

sind überhaupt beide Grenzwerte von a_{34} nur wegen der Annahme $a_{33} < a_{11} + a_{22}$ von Null verschieden, während immer die Annahme $a_{33} \geqq a_{11} + a_{22}$ unter Beibehaltung der Grenzwerte der anderen $a_{\varkappa\lambda}$ für a_{33} die Grenzwerte 0 und $\pm\frac{a_{33}}{2}$ liefert.

Die Bedingung (1) lässt für reducierte Formen den Fall zu, dass alle vier Hauptkoefficienten einander gleich werden. Derselbe sei einstweilen ausgeschlossen; dann lässt sich zeigen, dass das Produkt $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$ kleiner als die vierfache Determinante

(9) $$\begin{aligned} D = {} & a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44} - a_{12}^2\,a_{33}\,a_{44} - a_{13}^2\,a_{22}\,a_{44} - a_{14}^2\,a_{22}\,a_{33} \\ & - a_{23}^2\,a_{11}\,a_{44} - a_{24}^2\,a_{11}\,a_{33} - a_{34}^2\,a_{11}\,a_{22} + a_{12}^2\,a_{34}^2 \\ & + a_{13}^2\,a_{24}^2 + a_{14}^2\,a_{23}^2 + 2a_{12}\,a_{13}\,a_{23}\,a_{44} + 2a_{12}\,a_{14}\,a_{24}\,a_{33} \\ & + 2a_{13}\,a_{14}\,a_{34}\,a_{22} + 2a_{23}\,a_{24}\,a_{34}\,a_{11} - 2a_{12}\,a_{13}\,a_{24}\,a_{34} \\ & - 2a_{12}\,a_{14}\,a_{23}\,a_{34} - 2a_{13}\,a_{14}\,a_{23}\,a_{24} \end{aligned}$$

der reducierten quaternären Form F ist, indem nachgewiesen wird, dass der Ausdruck

(10) $$\begin{aligned} 4D - a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44} = {} & 3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - 4a_{12}^2a_{33}\,a_{44} - 4a_{13}^2a_{22}\,a_{44} \\ & - 4a_{14}^2a_{22}a_{33} - 4a_{23}^2a_{11}a_{44} - 4a_{24}^2a_{11}a_{33} \\ & - 4a_{34}^2\,a_{11}\,a_{22} + 4a_{12}^2\,a_{34}^2 + 4a_{13}^2\,a_{24}^2 \\ & + 4a_{14}^2\,a_{23}^2 + 8a_{12}\,a_{13}\,a_{23}\,a_{44} + 8a_{12}\,a_{14}\,a_{24}\,a_{33} \\ & + 8a_{13}a_{14}a_{34}a_{22} + 8a_{23}a_{24}a_{34}a_{11} - 8a_{12}a_{13}a_{24}a_{34} \\ & - 8a_{12}a_{14}a_{23}a_{34} - 8a_{13}a_{14}a_{23}a_{24} \end{aligned}$$

für alle den Bedingungen (1) bis (8) genügenden Werte der als variabel betrachteten Koefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ positiv ist. Um letzteren Beweis zu erbringen, bediene ich mich folgender von Herrn Hermite herrührender Überlegung:

Der Ausdruck (10) ist in bezug auf a_{12} vom zweiten Grade, und das quadratische Glied $-4\,(a_{33}\,a_{44} - a_{34}^2)\,a_{12}^2$ hat infolge der Bedingung für eine reducierte Form $a_{44} \geqq a_{33} \geqq 2a_{34}$ einen negativen Koefficienten. Beide Wurzeln des Ausdrucks (10) für a_{12} sind demnach reell und von entgegengesetztem Vorzeichen, wenn der von a_{12} unabhängige Bestandteil, den man für $a_{12} = 0$ erhält, positiv ist. Ist dies der Fall, und nimmt selbiger Ausdruck für

den kleinsten und grössten Wert von a_{12} ebenfalls positive Werte an, so ist er überhaupt für alle Werte von a_{12} positiv. Denn da unter jeder der Voraussetzungen I. bis VIII. a_{12} nur Werte desselben Vorzeichens durchläuft, und es nur eine Wurzel des Ausdrucks (10) für a_{12} giebt, welche dieses Vorzeichen besitzt, so würde er nicht für beide Grenzwerte von a_{12} positiv sein, wenn dieser Wurzelwert, der seinem Vorzeichen nach allein zwischen jenen liegen kann, zwischen ihnen läge. Da also beide Grenzwerte durch keinen Wurzelwert getrennt sind, kann (10) auch für alle zwischen ihnen liegenden Werte von a_{12} nur positiv sein. Einer der beiden Grenzwerte von a_{12} ist immer 0. Es genügt daher, unter jeder der Voraussetzungen I. bis VIII. nachzuweisen, dass (10) positiv ist für $a_{12}=0$ und den von Null verschiedenen Grenzwert von a_{12}. Substituiert man nun in (10) für a_{12} einmal den Wert 0, ein anderes mal seinen von Null verschiedenen Grenzwert, so erhält man zwei neue Ausdrücke, von denen jeder in bezug auf a_{13} quadratisch ist und als Koefficienten des quadratischen Gliedes eine negative Grösse hat. Da ferner auch a_{13} vom Werte 0 an nur solche von demselben Vorzeichen annimmt, lassen sich alle obigen Schlüsse nun auf a_{13} und später aus gleichen Gründen auf a_{14}, a_{23} und a_{24} übertragen. Sie finden auch auf a_{34} noch Anwendung, wenn einer von dessen Grenzwerten gleich 0 ist. Sollte dies nicht der Fall sein, so genügt trotzdem der Nachweis, dass Ausdruck (10) positiv ist für die beiden von Null verschiedenen Grenzwerte von a_{34}. Denn ist dieser einerseits auch noch für $a_{34}=0$ positiv, so machen sich die früheren Schlüsse wieder geltend; ist er andererseits negativ für $a_{34}=0$, so muss eine Wurzel desselben zwischen dem Werte 0 und demjenigen Grenzwerte von a_{34} liegen, der absolut genommen der kleinste ist. Infolgedessen kann zwischen den Grenzwerten selbst, die dasselbe Vorzeichen führen, keine Wurzel des Ausdrucks gelegen sein.

Es erübrigt also, für jede der Voraussetzungen I. bis VIII. die aus den Bedingungen (1) bis (8) resultierenden

kleinsten und grössten Werte für jeden Koefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ zu bestimmen und die entsprechenden Werte von $4D - a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$ hinsichtlich ihres Vorzeichens zu untersuchen.

Sieht man von den Fällen, in denen beide Grenzwerte von a_{34} von Null verschieden sind, einstweilen ab, so erhält man alle zu untersuchenden Werte des Ausdrucks (10), wenn man in ihm zunächst allen $a_{\varkappa\lambda}$ den Wert 0 giebt, dann den Grössen $a_{\varkappa\lambda}$ in allen Kombinationen zu je 1, 2, 3, 4, 5 und 6 ihren von Null verschiedenen Wert beilegt, während die in der Kombination fehlenden $a_{\varkappa\lambda}$ jedesmal durch 0 ersetzt werden. Für eine grosse Anzahl dieser Wertverbindungen der $a_{\varkappa\lambda}$ lässt sich das positive Vorzeichen des Ausdrucks (10) allgemein nachweisen. Hierhin gehört zunächst diejenige, in welcher alle $a_{\varkappa\lambda}$ den Wert 0 haben, wodurch (10) sich auf das positive Glied $3a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$ beschränkt, ferner aber alle Werte von $4D - a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$, in denen nicht mehr als drei von den Grössen $a_{\varkappa\lambda}$ ihren von Null verschiedenen Grenzwert besitzen.

Infolge der Bedingung (1) ist nämlich jedes der Glieder (11) $-4a_{1^2}^{\,2}\,a_{33}\,a_{44}$, $-4a_{1^3}^{\,2}\,a_{22}\,a_{44}$, $-4a_{1^4}^{\,2}\,a_{22}\,a_{33}$, $-4a_{2^2}^{\,2}\,a_{11}\,a_{44}$, $-4a_{2^4}^{\,2}\,a_{11}\,a_{33}$, $-4a_{3^4}^{\,2}\,a_{11}\,a_{22}$ des Ausdrucks (10) kleiner, höchstens gleich dem Produkte $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$, wenn die Grössen $a_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa<\lambda)$ den durch die Bedingung (2) resp. (3) bestimmten Grenzwert $\pm\frac{a_{\varkappa\varkappa}}{2}$ erhalten.

In den beiden Fällen nun, in denen nur eine oder nur zwei von den Grössen $a_{\varkappa\lambda}$ durch ihren von Null verschiedenen Grenzwert ersetzt werden sollen, reduciert sich (10) auf

(12) $$3a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44} - a^2_{\varkappa_1\lambda_1}\,a_{\mu_1\mu_1}\,a_{\nu_1\nu_1},$$

resp. auf

(13) $$3a_{11}\,a_{22}\,a_{33}a_{44} - 4a^2_{\varkappa_1\lambda_1}\,a_{\mu_1\mu_1}a_{\nu_1\nu_1} - 4a^2_{\varkappa_2\lambda_2}\,a_{\mu_2\mu_2}\,a_{\nu_2\nu_2} + g;$$

in (12) bedeutet $-4a^2_{\varkappa_1\lambda_1}\,a_{\mu_1\mu_1}\,a_{\nu_1\nu_1}$ eines von den Gliedern (11); in (13) bedeuten $-4a^2_{\varkappa_1\lambda_1}\,a_{\mu_1\mu_1}\,a_{\nu_1\nu_1}$ und $-4^2_{\varkappa_2\lambda_2}\,a_{\mu_2\mu_2}\,a_{\nu_2\nu_2}$ zwei verschiedene Glieder (11), und ist g gleich 0 oder gleich einem der positiven Glieder

(14) $\quad 4a_{12}^2a_{34}^2,\ 4a_{13}^2a_{24}^2,\ 4a_{14}^2a_{23}^2,$

je nachdem unter den Indices $\varkappa_1, \lambda_1, \varkappa_2, \lambda_2$ einer zweimal auftritt, oder nicht. In beiden Fällen sind aber auch die von Null verschiedenen Grenzwerte von $a_{\varkappa_1\lambda_1}$ und $a_{\varkappa_2\lambda_2}$ beziehungsweise $\pm\frac{a_{\varkappa_1\varkappa_1}}{2}$ und $\pm\frac{a_{\varkappa_2\varkappa_2}}{2}$, wenn $\varkappa_1<\lambda_1$, $\varkappa_2<\lambda_2$ ist. Somit ist sowohl Ausdruck (12) als auch (13) positiv.

Sollen ferner drei $a_{\varkappa\lambda}$ den Wert 0, die anderen drei ihren von Null verschiedenen Grenzwert haben, so nimmt (10) die Gestalt an

$$(15)\quad 3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{\varkappa_1\lambda_1}^2a_{\mu_1\mu_1}a_{\nu_1\nu_1}-4a_{\varkappa_2\lambda_2}^2a_{\mu_2\mu_2}a_{\nu_2\nu_2}$$
$$-4a_{\varkappa_3\lambda_3}^2a_{\mu_3\mu_3}a_{\nu_3\nu_3}+g_1,$$

wo $-4a_{\varkappa_1\lambda_1}^2a_{\mu_1\mu_1}a_{\nu_1\nu_1}$, $-4a_{\varkappa_2\lambda_2}^2a_{\mu_2\mu_2}a_{\nu_2\nu_2}$, $-4a_{\varkappa_3\lambda_3}^2a_{\mu_3\mu_3}a_{\nu_3\nu_3}$ drei verschiedene von den Gliedern (11) bedeuten. Ferner stellt g_1 eines der positiven Glieder (14) dar, wenn entweder die Indices $\varkappa_1, \lambda_1, \varkappa_2, \lambda_2$ oder $\varkappa_1, \lambda_1, \varkappa_3, \lambda_3$ oder $\varkappa_2, \lambda_2, \varkappa_3, \lambda_3$ alle verschieden sind. Lassen sich aber $\varkappa_1\lambda_1$, $\varkappa_2\lambda_2$, $\varkappa_3\lambda_3$ zu einem Cyklus anordnen, so ist für g_1 eines der Glieder

(16) $8a_{12}a_{13}a_{23}a_{44}$, $8a_{12}a_{14}a_{24}a_{33}$, $8a_{13}a_{14}a_{34}a_{22}$, $8a_{23}a_{24}a_{34}a_{11}$

zu setzen. Wird keine von diesen Bedingungen erfüllt, so ist $g_1=0$.

In letzterem Falle, sowie wenn g_1 eines der Glieder (14) darstellt, werden die Grenzwerte von $a_{\varkappa_1\lambda_1}$, $a_{\varkappa_2\lambda_2}$, $a_{\varkappa_3\lambda_3}$ durch die Bedingungen (2) resp. (3) bestimmt. Für beide Fälle ist folglich das Produkt $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ grösser oder doch wenigstens gleich jedem der drei in (15) vorkommenden negativen Glieder. Da ferner für $g_1=0$ das Produkt $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ den absoluten Wert wenigstens eines der negativen Glieder in (15) übertreffen muss, und im anderen Falle in (15) für g_1 noch ein positives Glied hinzukommt, ist für beide $4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ positiv. Dass für $g_1=0$ nicht gleichzeitig

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=4a_{\varkappa_1\lambda_1}^2a_{\mu_1\mu_1}a_{\nu_1\nu_1}=4a_{\varkappa_2\lambda_2}^2a_{\mu_2\mu_2}a_{\nu_2\nu_2}=4a_{\varkappa_3\lambda_3}^2a_{\mu_3\mu_3}a_{\nu_3\nu_3}$

sein kann, folgt so: Die Indices $\varkappa_1\lambda_1$, $\varkappa_2\lambda_2$, $\varkappa_3\lambda_3$ sollen sich weder zu einem Cyklus anordnen lassen, noch sollen $\varkappa_1$,

$\lambda_1, \varkappa_2, \lambda_2$ oder $\varkappa_1, \lambda_1, \varkappa_3, \lambda_3$ oder $\varkappa_2, \lambda_2, \varkappa_3, \lambda_3$ alle verschieden sein; deshalb muss einer von ihnen, etwa $\varkappa'$, sowohl unter $\varkappa_1, \lambda_1$, als auch unter $\varkappa_2, \lambda_2$, als auch unter $\varkappa_3, \lambda_3$ vorhanden sein, während die drei übrigen, die beziehungsweise mit $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ bezeichnet seien, sowohl von $\varkappa'$, als auch unter einander verschieden sind. Da zudem

$$\begin{array}{llllll} \mu_1, \nu_1 & \text{von } \varkappa_1, \lambda_1, & \text{das ist von } & \varkappa', & \lambda' \\ \mu_2, \nu_2 & \text{,, } \varkappa_2, \lambda_2, & \text{,, } & \text{,, } & \varkappa', \lambda'' \\ \mu_3, \nu_3 & \text{,, } \varkappa_3, \lambda_3, & \text{,, } & \text{,, } & \varkappa', \lambda''' \end{array}$$

differieren, bedingt das Verschwinden des Ausdrucks (15) die Gleichungen

(17) $$\varkappa' = \lambda', \ \varkappa' = \lambda'', \ \varkappa' = \lambda''',$$

weil je nachdem $\varkappa' < \lambda'$ oder $\varkappa' > \lambda'$, $\varkappa' < \lambda''$ oder $\varkappa' > \lambda''$, $\varkappa' < \lambda'''$ oder $\varkappa' > \lambda'''$ ist, die Grenzwerte von $a_{\varkappa_1\lambda_1}$, $a_{\varkappa_2\lambda_2}$, $a_{\varkappa_3\lambda_3}$ beziehungsweise $\pm \frac{a_{\varkappa'\varkappa'}}{2}$ oder $\pm \frac{a_{\lambda'\lambda'}}{2}$, $\pm \frac{a_{\varkappa'\varkappa'}}{2}$ oder $\pm \frac{a_{\lambda''\lambda''}}{2}$, $\pm \frac{a_{\varkappa'\varkappa'}}{2}$ oder $\pm \frac{a_{\lambda'''\lambda'''}}{2}$ sind. Aus den Gleichungen (17) folgt aber $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44}$.

Zu untersuchen ist (15) noch für $g_1 = 8 a_{\varkappa_1\lambda_1} a_{\varkappa_2\lambda_2} a_{\varkappa_3\lambda_3} a_{\tau\tau}$, wo τ den unter $\varkappa_1, \lambda_1, \varkappa_2, \lambda_2, \varkappa_3, \lambda_3$ nicht auftretenden Index 1, 2, 3, 4 bedeutet. Von den Grössen $a_{\varkappa_1\lambda_1}$, $a_{\varkappa_2\lambda_2}$, $a_{\varkappa_3\lambda_3}$, in denen

(18) $$\varkappa_1 < \lambda_1, \ \varkappa_2 < \lambda_2, \ \varkappa_3 < \lambda_3$$

sei, haben $a_{\varkappa_1\lambda_1}$ und $a_{\varkappa_2\lambda_2}$, welche in der Reihenfolge

(19) $$a_{12}, \ a_{13}, \ a_{14}, \ a_{23}, \ a_{24}, \ a_{34}$$

zuerst stehen, die Grenzwerte $\pm \frac{a_{\varkappa_1\varkappa_1}}{2}$ resp. $\pm \frac{a_{\varkappa_2\varkappa_2}}{2}$, deren absolut genommenen Werte gleich sind, weil die Indices $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ übereinstimmen. Wenn man nämlich annimmt, in der Reihenfolge (19) stehe $a_{\varkappa_1\lambda_1}$ früher als $a_{\varkappa_2\lambda_2}$, so ist offenbar $\varkappa_1 \leqq \varkappa_2 < \varkappa_3$, und es giebt daher wegen der Ungleichheiten (18) keinen kleineren Index unter $\varkappa_1, \lambda_1, \varkappa_2, \lambda_2, \varkappa_3, \lambda_3$ als $\varkappa_1$. Da ferner $\varkappa_1\lambda_1, \varkappa_2\lambda_2, \varkappa_3\lambda_3$ sich zu einem Cyklus anordnen lassen, muss $\varkappa_1$ gleich einem der Indices $\varkappa_2, \lambda_2, \varkappa_3, \lambda_3$ sein. Eine Uebereinstimmung von $\varkappa_1$ mit λ_2 oder λ_3 ist nicht möglich, weil sonst infolge der Ungleichheiten

(18) der Index $\varkappa_2$ resp. $\varkappa_3$ kleiner als $\varkappa_1$ sein müsste; mit $\varkappa_3$ kann $\varkappa_1$ auch nicht übereinstimmen, weil die hieraus hervorgehende Gleichung $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3$ gegen die Möglichkeit verstösst, $\varkappa_1\lambda_1, \varkappa_2\lambda_2, \varkappa_3\lambda_3$ zu einem Cyklus anzuordnen. Es muss also

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 < \varkappa_3 \text{ und folglich } a_{\varkappa_1\varkappa_1} = a_{\varkappa_2\varkappa_2} \leqq a_{\varkappa_3\varkappa_3}$$

sein. Unter der Annahme, das Produkt $a_{\varkappa_1\lambda_1}a_{\varkappa_2\lambda_2}a_{\varkappa_3\lambda_3}$ sei positiv, sind die Grenzwerte von $a_{\varkappa_1\lambda_1}$, $a_{\varkappa_2\lambda_2}$, $a_{\varkappa_3\lambda_3}$ beziehungsweise $\pm\frac{a_{\varkappa_1\varkappa_1}}{2}$, $\pm\frac{a_{\varkappa_2\varkappa_2}}{2}$, $\pm\frac{a_{\varkappa_3\varkappa_3}}{2}$; somit ist (15) wegen der Ungleichungen resp. Gleichungen

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \geqq a^2_{\varkappa_1\varkappa_1}a_{\mu_1\mu_1}a_{\nu_1\nu_1}$$
$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \geqq a^2_{\varkappa_2\varkappa_2}a_{\mu_2\mu_2}a_{\nu_2\nu_2}$$
$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \geqq a^2_{\varkappa_3\varkappa_3}a_{\mu_3\mu_3}a_{\nu_3\nu_3}$$
$$a_{\varkappa_1\varkappa_1}a_{\varkappa_2\varkappa_2}a_{\varkappa_3\varkappa_3}a_{\tau\tau} > 0$$

positiv. Nimmt man dagegen an, das Produkt $a_{\varkappa_1\lambda_1}a_{\varkappa_2\lambda_2}a_{\varkappa_3\lambda_3}$ sei negativ, so sind entweder alle drei oder nur eine von den Grössen $a_{\varkappa_1\lambda_1}$, $a_{\varkappa_2\lambda_2}$, $a_{\varkappa_3\lambda_3}$ negativ. Der von Null verschiedene Grenzwert von $a_{\varkappa_3\lambda_3}$ wird daher durch Bedingung (4) oder (5) bestimmt und ist $\pm\frac{a_{\varkappa_3\varkappa_3} - a_{\varkappa_2\varkappa_2}}{2}$. Durch Substitution der Grenzwerte von $a_{\varkappa_1\lambda_1}$, $a_{\varkappa_2\lambda_2}$, $a_{\varkappa_3\lambda_3}$ in (15) geht dieser Ausdruck über in

$$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a^2_{\varkappa_1\varkappa_1}a_{\mu_1\mu_1}a_{\nu_1\nu_1} - a^2_{\varkappa_2\varkappa_2}a_{\mu_2\mu_2}a_{\nu_2\nu_2} - a^2_{\varkappa_3\varkappa_3}a_{\mu_3\mu_3}a_{\nu_3\nu_3}$$
$$+(a_{\varkappa_2\varkappa_2}a_{\varkappa_3\varkappa_3} - a^2_{\varkappa_2\varkappa_3})a_{\mu_3\mu_3}a_{\nu_3\nu_3} + (a_{\varkappa_2\varkappa_2}a_{\varkappa_3\varkappa_3}a_{\mu_3\mu_3}a_{\nu_3\nu_3}$$
$$- a_{\varkappa_1\varkappa_1}a_{\varkappa_2\varkappa_2}a_{\varkappa_3\varkappa_3}a_{\tau\tau}) + a_{\varkappa_1\varkappa_1}a^2_{\varkappa_2\varkappa_3}a_{\tau\tau}$$

und ist infolge der Ungleichungen resp. Gleichungen

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} > a^2_{\varkappa_1\varkappa_1}a_{\mu_1\mu_1}a_{\nu_1\nu_1}$$
$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} > a^2_{\varkappa_2\varkappa_2}a_{\mu_2\mu_2}a_{\nu_2\nu_2}$$
$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \geqq a^2_{\varkappa_3\varkappa_3}a_{\mu_3\mu_3}a_{\nu_3\nu_3}$$
$$a_{\varkappa_3\varkappa_3} > a_{\varkappa_2\varkappa_2}$$
$$a_{\varkappa_2\varkappa_2}a_{\varkappa_3\varkappa_3}a_{\mu_3\mu_3}a_{\nu_3\nu_3} = a_{\varkappa_1\varkappa_1}a_{\varkappa_2\varkappa_2}a_{\varkappa_3\varkappa_3}a_{\tau\tau}$$

positiv. Dass letztere Gleichung stattfindet, ergiebt sich so: der Cyklus der Indices $\varkappa_1\lambda_1$, $\varkappa_2\lambda_2$, $\varkappa_3\lambda_3$ lautet wegen der eben gemachten Annahme über die Stellung der

Grössen $a_{\varkappa_1\lambda_1}$, $a_{\varkappa_2\lambda_2}$, $a_{\varkappa_3\lambda_3}$ in der Reihenfolge (19) der $a_{\varkappa\lambda}$ entweder $\varkappa_1\lambda_1$, $\varkappa_3\lambda_3$, $\lambda_2\varkappa_2$ oder $\varkappa_1\lambda_1$, $\lambda_3\varkappa_3$, $\lambda_2\varkappa_2$.
Folglich werden die Jndices 1, 2, 3, 4 dargestellt entweder durch $\varkappa_1=\varkappa_2$, $\lambda_1=\varkappa_3$, $\lambda_2=\lambda_3$ und τ
oder durch $\varkappa_1=\varkappa_2$, $\lambda_1=\lambda_3$, $\varkappa_3=\lambda_2$ und τ,
jedenfalls also durch

$$\varkappa_1,\ \varkappa_3,\ \lambda_3 \text{ und } \tau.$$

Andererseits werden die nämlichen Indices auch dargestellt durch $\varkappa_3$, λ_3, μ_3 und ν_3,
sodass also jeder der Indices $\varkappa_1$ und τ übereinstimmen muss mit einem der Indices μ_3 und ν_3 und umgekehrt.

Mit Ausnahme der Fälle, in denen beide Grenzwerte von a_{34} von Null verschieden sind, giebt es für jede der Voraussetzungen I. bis VIII. 64 Wertverbindungen der $a_{\varkappa\lambda}$, für welche der Ausdruck (10) zu untersuchen ist. Für 42 derselben ist dieses geschehen, und es erübrigt noch, ihn zu untersuchen für 15 Wertverbindungen der $a_{\varkappa\lambda}$, in denen zwei und nur zwei, für 6 Wertverbindungen, in denen eine und nur eine, und für 1 Wertverbindung dieser Grössen, in welcher keine von ihnen den Wert 0 hat. Für diese 22 Wertverbindungen der $a_{\varkappa\lambda}$ reduciert sich der Ausdruck (10), jenachdem den $a_{\varkappa\lambda}$ in der einen oder anderen Kombination zu je 4 oder 5 ihre von Null verschiedenen Grenzwerte beigelegt werden, auf:

1) für $a_{12}=a_{13}=0$ | $3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{1^2}^{2}a_{22}a_{33}-4a_{2^3}^{2}a_{11}a_{44}$
$-4a_{2^4}^{2}a_{11}a_{33}-4a_{3^4}^{2}a_{11}a_{22}+4a_{1^4}^{2}a_{2^3}^{2}$
$+8a_{23}a_{24}a_{34}a_{11}$.

2) „ $a_{12}=a_{14}=0$ | $3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{1^3}^{2}a_{22}a_{44}-4a_{2^3}^{2}a_{11}a_{44}$
$-4a_{2^4}^{2}a_{11}a_{33}-4a_{3^4}^{2}a_{11}a_{22}+4a_{1^3}^{2}a_{2^4}^{2}$
$+8a_{23}a_{24}a_{34}a_{11}$.

3) „ $a_{12}=a_{23}=0$ | $3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{1^3}^{2}a_{22}a_{44}-4a_{1^4}^{2}a_{22}a_{33}$
$-4a_{2^4}^{2}a_{11}a_{33}-4a_{3^4}^{2}a_{11}a_{22}+4a_{1^3}^{2}a_{2^4}^{2}$
$+8a_{13}a_{14}a_{34}a_{22}$.

4) „ $a_{12}=a_{24}=0$ | $3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{1^3}^{2}a_{22}a_{44}-4a_{1^4}^{2}a_{22}a_{33}$
$-4a_{2^3}^{2}a_{11}a_{44}-4a_{3^4}^{2}a_{11}a_{22}+4a_{1^4}^{2}a_{2^3}^{2}$
$+8a_{13}a_{14}a_{34}a_{22}$.

5) „ $a_{12}=a_{34}=0$ | $3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{1^3}^{2}a_{22}a_{44}-4a_{1^4}^{2}a_{22}a_{33}$
$-4a_{2^3}^{2}a_{11}a_{44}-4a_{2^4}^{2}a_{11}a_{33}+4a_{1^3}^{2}a_{2^4}^{2}$
$+4a_{1^4}^{2}a_{2^3}^{2}-8a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}$.

6) für $a_{13}=a_{14}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{23}^2a_{11}a_{44}$
$-4a_{24}^2a_{11}a_{33}-4a_{34}^2a_{11}a_{22}+4a_{12}^2a_{34}^2$
$+8a_{23}a_{24}a_{34}a_{11}.$

7) „ $a_{13}=a_{23}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{14}^2a_{22}a_{33}$
$-4a_{24}^2a_{11}a_{33}-4a_{34}^2a_{11}a_{22}+4a_{12}^2a_{34}^2$
$+8a_{12}a_{14}a_{24}a_{33}.$

8) „ $a_{13}=a_{24}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{11}-4a_{14}^2a_{22}a_{33}$
$-4a_{23}^2a_{11}a_{44}-4a_{34}^2a_{11}a_{22}+4a_{12}^2a_{34}^2$
$+4a_{14}^2a_{23}^2-8a_{12}a_{14}a_{23}a_{34}.$

9) „ $a_{13}=a_{34}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{14}^2a_{22}a_{33}$
$-4a_{23}^2a_{11}a_{44}-4a_{24}^2a_{11}a_{33}+4a_{14}^2a_{23}^2$
$+8a_{12}a_{14}a_{24}a_{33}.$

10) „ $a_{14}=a_{23}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{13}^2a_{22}a_{44}$
$-4a_{24}^2a_{11}a_{33}-4a_{34}^2a_{11}a_{22}+4a_{12}^2a_{34}^2$
$+4a_{13}^2a_{24}^2-8a_{12}a_{13}a_{24}a_{34}.$

11) „ $a_{14}=a_{24}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{13}^2a_{22}a_{44}$
$-4a_{23}^2a_{11}a_{44}-4a_{34}^2a_{11}a_{22}+4a_{12}^2a_{34}^2$
$+8a_{12}a_{13}a_{23}a_{44}.$

12) „ $a_{14}=a_{34}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{13}^2a_{22}a_{44}$
$-4a_{23}^2a_{11}a_{44}-4a_{24}^2a_{11}a_{33}+4a_{13}^2a_{24}^2$
$+8a_{12}a_{13}a_{23}a_{44}.$

13) „ $a_{23}=a_{24}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{13}^2a_{22}a_{44}$
$-4a_{14}^2a_{22}a_{33}-4a_{34}^2a_{11}a_{22}+4a_{12}^2a_{34}^2$
$+8a_{13}a_{14}a_{34}a_{22}.$

14) „ $a_{23}=a_{34}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{13}^2a_{22}a_{44}$
$-4a_{14}^2a_{22}a_{33}-4a_{24}^2a_{11}a_{33}+4a_{13}^2a_{24}^2$
$+8a_{12}a_{14}a_{24}a_{33}.$

15) „ $a_{24}=a_{34}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{13}^2a_{22}a_{44}$
$-4a_{14}^2a_{22}a_{33}-4a_{23}^2a_{11}a_{44}+4a_{14}^2a_{23}^2$
$+8a_{12}a_{13}a_{23}a_{44}.$

16) „ $a_{12}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{13}^2a_{22}a_{44}-4a_{14}^2a_{22}a_{33}$
$-4a_{23}^2a_{11}a_{44}-4a_{24}^2a_{11}a_{33}-4a_{34}^2a_{11}a_{22}$
$+4a_{13}^2a_{24}^2+4a_{14}^2a_{23}^2+8a_{23}a_{24}a_{34}a_{11}$
$+8a_{13}a_{14}a_{34}a_{22}-8a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}.$

17) „ $a_{13}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{14}^2a_{22}a_{33}$
$-4a_{23}^2a_{11}a_{44}-4a_{24}^2a_{11}a_{33}-4a_{34}^2a_{11}a_{22}$
$+4a_{12}^2a_{34}^2+4a_{14}^2a_{23}^2+8a_{12}a_{14}a_{24}a_{33}$
$+8a_{23}a_{24}a_{34}a_{11}-8a_{12}a_{14}a_{23}a_{34}.$

18) „ $a_{14}=0$
$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{13}^2a_{22}a_{44}$
$-4a_{23}^2a_{11}a_{44}-4a_{24}^2a_{11}a_{33}-4a_{34}^2a_{11}a_{22}$
$+4a_{12}^2a_{34}^2+4a_{13}^2a_{24}^2+8a_{12}a_{13}a_{23}a_{44}$
$+8a_{23}a_{24}a_{34}a_{11}-8a_{12}a_{13}a_{24}a_{34}.$

19) für	$a_{23}=0$	$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{13}^2a_{22}a_{44}$ $-4a_{14}^2a_{22}a_{33}-4a_{24}^2a_{11}a_{33}-4a_{34}^2a_{11}a_{22}$ $+4a_{12}^2a_{34}^2+4a_{13}^2a_{24}^2+8a_{12}a_{14}a_{24}a_{33}$ $+8a_{13}a_{14}a_{34}a_{22}-8a_{12}a_{13}a_{24}a_{34}.$
20) „	$a_{24}=0$	$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{13}^2a_{22}a_{44}$ $4a_{14}^2a_{22}a_{33}-4a_{23}^2a_{11}a_{44}-4a_{34}^2a_{11}a_{22}$ $+4a_{12}^2a_{34}^2+4a_{14}^2a_{23}^2+8a_{12}a_{13}a_{23}a_{44}$ $+8a_{13}a_{14}a_{34}a_{22}-8a_{12}a_{14}a_{23}a_{34}.$
21) „	$a_{34}=0$	$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-4a_{12}^2a_{33}a_{44}-4a_{13}^2a_{22}a_{44}$ $-4a_{14}^2a_{22}a_{33}-4a_{23}^2a_{11}a_{44}-4a_{24}^2a_{11}a_{33}$ $+4a_{13}^2a_{24}^2+4a_{14}^2a_{23}^2+8a_{12}a_{13}a_{23}a_{44}$ $+8a_{12}a_{14}a_{24}a_{33}-8a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}.$

Im Folgenden sollen die Grenzwerte der $a_{\varkappa\lambda}$ für jede der Voraussetzungen I. bis VIII. in diese Ausdrücke eingesetzt, und diese dann ausgerechnet werden; und zwar wird für jede Voraussetzung eine Tabelle gebildet, in deren sechs ersten Spalten die Grenzwerte der $a_{\varkappa\lambda}$ stehen, während sich rechts davon der Wert des Ausdrucks $4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ befindet, welcher dieser Wertverbindung der $a_{\varkappa\lambda}$ entspricht. In den Fällen, in denen es nicht möglich ist, dem Ausdruck $4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ eine einzige Gestalt zu geben, aus der das positive Vorzeichen desselben erkennbar ist, sowie in dem Falle, dass beide Grenzwerte von a_{34} von Null verschieden sind, soll der Nachweis des positiven Vorzeichens von Ausdruck (10) erst nach Schluss der Tabelle erbracht werden. Jeder der Ausdrücke 1) bis 15), in denen je vier verschiedene $a_{\varkappa\lambda}$ vorkommen, enthält diese bis auf eines seiner Glieder im Quadrate. Ebenso treten in den Ausdrücken 16) bis 21) je fünf verschiedene $a_{\varkappa\lambda}$ nur im Quadrate auf, ausgenommen immer in drei Gliedern. Hieraus geht hervor, dass auch jeder dieser Ausdrücke für verschiedene von den Voraussetzungen I. bis VIII. denselben Wert besitzt, wenn nämlich für diese die absolut genommenen Grenzwerte der $a_{\varkappa\lambda}$ übereinstimmen, und wenn jedes Glied, welches die Grössen $a_{\varkappa\lambda}$ nicht im Quadrat enthält, für die betreffenden Voraussetzungen dasselbe Vorzeichen führt. Sobald eine derartige Wiederholung des Wertes von $4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ eintritt, soll dieser

in der Tabelle nicht nochmals notiert, sondern nur durch das Zeichen derjenigen Voraussetzung angedeutet werden, unter welcher er zum ersten male vorkam.

I.

$a_{12} \gtrless 0,\ a_{13} \gtrless 0,\ a_{14} \gtrless 0,\ a_{23} \lessgtr 0,\ a_{24} \lessgtr 0,\ a_{34} \lessgtr 0.$

$2a_{12}$	$2a_{13}$	$2a_{14}$	$-2a_{23}$	$-2a_{24}$	$-2a_{34}$	$4D - a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$
1. 0	0	a_{11}	a_{22}	a_{32}	$a_{33}-a_{22}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}^2a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2a_{22}^2.$
2. 0	a_{11}	0	a_{22}	a_{32}	$a_{33}-a_{22}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2a_{22}^2.$
3. 0	a_{11}	a_{11}	0	a_{32}	$a_{33}-a_{11}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2a_{22}^2.$
4. 0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	$a_{33}-a_{11}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2a_{22}^2.$
5. 0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}(a_{11}+a_{33} - a_{11}a_{22}(a_{11}+a_{22})a_{44}.$ *)
6. a_{11}	0	0	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{22})^2.$
7. a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2a_{33}^2.$
8. a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	0	$a_{33}-a_{11}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{11})^2.$
						$+\frac{1}{2}(a_{11}^2a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{33} - a_{11}^3a_{22}) + \frac{1}{4}a_{11}^2a_{22}^2.$
9. a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	0	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{33}) + \frac{1}{4}a_{11}^2a_{22}^2.$
10. a_{11}	a_{11}	0	0	a_{22}	$a_{33}-a_{11}$	[1]
11. a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	0	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2a_{33}^2.$
12. a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	0	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{33}) + \frac{1}{4}a_{11}^2a_{22}^2.$
13. a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	0	$a_{33}-a_{11}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{11})^2.$
14. a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	0	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{33}) + \frac{1}{4}a_{11}^2(a_{22}-a_{11})^2.$
15. a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	0	0	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{33}) + \frac{1}{4}a_{11}^2(a_{22}-a_{11})^2.$
16. 0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$-(a_{11}+a_{22})$	$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2 - a_{11}a_{22}(a_{11}+a_{22})a_{44}.$ *)
17. a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	$a_{33}-a_{22}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2a_{33}^2.$
18. a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{33}) + \frac{1}{4}a_{11}^2a_{33}^2.$
19. a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	$a_{33}-a_{11}$	[2]
20. a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	0	$a_{33}-a_{11}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{22})^2.$
21. a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	$a_{22}-a_{11}$	0	$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}^2a_{33}.$
22. a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	$a_{22}-a_{11}$	$a_{33}-a_{22}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{33}a_{44} - a_{11}^2a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{22})^2.$

*) Setzt man in Bedingung (7) für σ, μ, ν, ϱ beziehungsweise 1, 2, 3, 4 und substituiert dann die unter 5. und 16. angegebenen Grenzwerte von a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, so heisst diese $a_{33}-(a_{11}+a_{22})+2a_{34}\geqq 0$.
Da a_{34} negativ ist, kann dieser Bedingung nur Genüge geschehen, wenn $a_{33}\geqq a_{11}+a_{22}$
ist, und unter dieser Voraussetzung sind die Grenzwerte von a_{34} für jene Fälle 0 und $-\frac{a_{33}-(a_{11}+a_{22})}{2}$.

[1]) Für die Grenzwerte der $a_{\varkappa\lambda}$ in 10. ist

(20) $4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{1'1}^2a_{33}a_{44}-a_{1'1}^2a_{22}a_{44}$
$-a_{11}a_{22}a_{3'3}^2-a_{11}a_{2'2}^2a_{33}+\frac{1}{4}a_{1'1}^2a_{2'2}^2+\frac{3}{2}a_{1'1}^2a_{22}a_{33}$
$-\frac{1}{2}a_{1'1}^3a_{22}+\frac{1}{4}a_{1'1}^2(a_{33}-a_{11})^2$

positiv, sowohl für $5a_{11}\geqq 4a_{22}$, als auch für $5a_{33}\geqq 4a_{44}$, wie aus folgenden Gestalten des rechts stehenden Ausdrucks hervorgeht:

$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{1'1}^2a_{33}a_{44}-a_{1'1}^2a_{22}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{3'3}^2)$
$+\frac{1}{4}(a_{1'1}^2a_{2'2}^2-a_{1'1}^3a_{22})+\frac{1}{4}(a_{1'1}^2a_{22}a_{33}-a_{1'1}^3a_{22})$
$+\frac{1}{4}(5a_{1'1}^2a_{22}a_{33}-4a_{11}a_{2'2}^2a_{33})+\frac{1}{4}a_{1'1}^2(a_{33}-a_{11})^2$,

und

$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{1'1}^2a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{3'3}^2-a_{11}a_{2'2}^2a_{33})$
$+\frac{1}{4}(a_{1'1}^2a_{2'2}^2-a_{1'1}^3a_{22})+\frac{1}{4}(a_{1'1}^2a_{22}a_{33}-a_{1'1}^3a_{22})$
$+\frac{1}{4}(5a_{1'1}^2a_{22}a_{33}-4a_{1'1}^2a_{22}a_{44})+\frac{1}{4}a_{1'1}^2(a_{33}-a_{11})^2$.

Für die gleichzeitig stattfindenden Ungleichungen $5a_{11}<4a_{22}$ und $5a_{33}<4a_{44}$ erkennt man aus der Gestalt

$\frac{1}{2}\frac{1}{0}(8a_{11}(4a_{22})a_{33}a_{44}-4a_{11}(5a_{11})a_{33}a_{44}-4a_{11}(5a_{11})a_{22}a_{44})$
$+\frac{1}{2}\frac{1}{0}(7a_{11}a_{22}a_{33}(4a_{44})-4a_{11}a_{22}a_{33}(5a_{33})-3a_{11}a_{2'2}^2(5a_{33}))$
$+\frac{1}{4}(a_{1'1}^2a_{2'2}^2-a_{1'1}^3a_{22})+\frac{1}{4}(a_{1'1}^2a_{22}a_{33}-a_{1'1}^3a_{22})$
$+\frac{1}{4}a_{1'1}^2(a_{33}-a_{11})^2+\frac{1}{4}(5a_{1'1}^2a_{22}a_{33}-a_{11}a_{2'2}^2a_{33})$

das positive Vorzeichen des Ausdrucks (20), wenn $5a_{11}\geqq a_{22}$ ist. Da schliesslich infolge der Ungleichung $5a_{11}<a_{22}$ die Summe aller negativen Glieder von (20) absolut genommen den Wert des Gliedes $3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ nicht erreicht, ist (20) immer positiv.

[2]) Im Falle 19. nimmt $4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ den Wert

(21) $3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{1'1}^2a_{33}a_{44}-a_{1'1}^2a_{22}a_{44}-a_{11}a_{2'2}^2a_{33}$
$-a_{11}a_{22}a_{3'3}^2+\frac{1}{4}a_{1'1}^2(a_{22}+a_{33})^2$

an, welcher unter der Annahme

$$a_{44} \geqq a_{22}+a_{33}$$

positiv ist, wie aus der Gestalt

$$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}(a_{22}+a_{33})) + \tfrac{1}{4}a_{11}^2(a_{22}+a_{33})^2$$

hervorgeht. Ist dagegen $a_{44} < a_{22}+a_{33}$, so ergiebt sich aus folgenden Umformungen von (21)

(21a) $\tfrac{1}{4}a_{11}^2(a_{22}+a_{33})(a_{22}+a_{33}-a_{44}) + (a_{11}a_{22}a_{33}(2a_{44}) - a_{11}a_{22}a_{33}(a_{22}+a_{33})) + \tfrac{1}{4}(4a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - 3a_{11}^2 a_{44}(a_{22}+a_{33}),$

(21b) $\tfrac{1}{12}a_{11}(a_{22}+a_{33})(3a_{11}(a_{22}+a_{33}) - 4a_{22}a_{33}) + \tfrac{2}{3}(a_{11}a_{22}a_{33}(2a_{44}) - a_{11}a_{22}a_{33}(a_{22}+a_{33})) + \tfrac{1}{3}(5a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - 3a_{11}^2 a_{44}(a_{22}+a_{33})),$

(21c) $\tfrac{1}{12}a_{11}(a_{22}+a_{33})(3a_{11}(a_{22}+a_{33}) - 5a_{22}a_{33}) + \tfrac{7}{12}(a_{11}a_{22}a_{33}(2a_{44}) - a_{11}a_{22}a_{33}(a_{22}+a_{33})) + \tfrac{1}{6}(11a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - 6a_{11}^2 a_{44}(a_{22}+a_{33})),$

(21d) $\tfrac{1}{24}a_{11}(a_{22}+a_{33})(6a_{11}(a_{22}+a_{33}) - 11a_{22}a_{33}) + \tfrac{3}{24}(a_{11}a_{22}a_{33}(2a_{44}) - a_{11}a_{22}a_{33}(a_{22}+a_{33})) + \tfrac{1}{12}(23a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - 12a_{11}^2 a_{44}(a_{22}+a_{33}))$

der positive Wert dieses Ausdrucks zu erkennen, wenn man

in (21a) $4a_{22}a_{33} \geqq 3a_{11}(a_{22}+a_{33})$,

„ (21b) $4a_{22}a_{33} < 3a_{11}(a_{22}+a_{33})$, aber $5a_{22}a_{33} > 3a_{11}(a_{22}+a_{33})$,

„ (21c) $5a_{22}a_{33} < 3a_{11}(a_{22}+a_{33})$, „ $11a_{22}a_{33} \geqq 6a_{11}(a_{22}+a_{33})$,

„ (21d) $11a_{22}a_{33} < 6a_{11}(a_{22}+a_{33})$, „ $23a_{22}a_{33} > 12a_{11}(a_{22}+a_{33})$

annimmt. Sollte in Wirklichkeit auch letztere Ungleichung noch nicht vorliegen, sondern $23a_{22}a_{33} < 12a_{11}(a_{22}+a_{33})$ sein, so erkennt man doch leicht, dass durch Wiederholung des angewandten Verfahrens, welches in unbeschränkter Anzahl vorgenommen werden kann, das Verhältnis der Produkte $a_{11}(a_{22}+a_{33})$ und $a_{22}a_{33}$ in den betreffenden Ungleichungen der Zahl 2 beliebig genähert werden kann. Da aber das Produkt $a_{11}(a_{22}+a_{33})$ höchstens den doppelten Wert des Produktes $a_{22}a_{33}$ anzunehmen vermag, muss man einmal auf eine Ungleichung stossen, für welche Ausdruck (21) nur positiv sein kann.

In dem Grenzfalle $a_{11}(a_{22}+a_{33}) = 2a_{22}a_{33}$ ist $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ u. somit reduciert sich (21) auf das positive Glied $a_{33}^2(a_{44} - a_{33})$. Den Wert 0 kann dieses nicht annehmen, weil dann $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44}$ wäre, und dieser Fall ausgeschlossen ist.

II.

$a_{12} \leqq 0,\ a_{13} \leqq 0,\ a_{14} \leqq 0,\ a_{23} \geqq 0,\ a_{24} \geqq 0,\ a_{34} \geqq 0.$

	$-2a_{12}$	$-2a_{13}$	$-2a_{14}$	$2a_{23}$	$2a_{24}$	$2a_{34}$	4D- $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$
1.	0	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{22}^2$.
2.	0	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{22}^2$.
3.	0	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{22}^2$.
4.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{22}^2$.
5.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	—	*)
6.	a_{11}	0	0	a_{22}	a_{22}	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{33}^2$.
7.	a_{11}	0	a_{11}	0	a_{22}	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{33}^2$.
8.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	0	$a_{33} - a_{11}$	I.
9.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{33}) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{22}^2$.
10.	a_{11}	a_{11}	0	0	a_{22}	$a_{33} - a_{11}$	I.
11.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	0	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{33}^2$.
12.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	0	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{33}) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{22}^2$.
13.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	0	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{33}^2$.
14.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	0	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{22}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{33}) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{22}^2$.
15.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	0	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}^2 a_{44}) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{22}^2$.
16.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	—	*)
17.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 (a_{33} - a_{22})^2$.
18.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 (a_{33} - a_{22})^2$.
19.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{33}	[1])
20.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 (a_{33} - a_{22})^2$.
21.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{33}$.
22.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}^2 a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}^2 a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}^2) + \frac{1}{4}a_{11}^2 a_{33}^2$.

*) Nimmt man in Bedingung (7) für μ, σ, ν, ϱ beziehungsweise 1, 2, 3, 4 und substituiert dann die unter 5. und 16. für a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24} angegebenen Grenzwerte, so heisst diese

$$a_{33}-(a_{11}+a_{22})+2a_{34}\geqq 0.$$

Da a_{34} positiv ist, wird dieser Bedingung immer genügt durch die Ungleichung

$$a_{33}\geqq a_{11}+a_{22},$$

bei deren Existenz a_{34} die durch (2) bestimmten Grenzwerte 0 und $\frac{a_{33}}{2}$ hat; für diese wird

$$4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}(a_{11}+a_{22})a_{33}$$
$$-a_{11}^2a_{22}a_{44}-a_{11}a_{22}^2a_{44}$$

resp. $$4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}(a_{11}+a_{22})a_{44}$$
$$-a_{11}a_{22}a_{33}^2.$$

Wenn dagegen die Ungleichung

$$a_{33}<a_{11}+a_{22}$$

vorliegt, nimmt a_{34} infolge der Bedingung

$$a_{11}+a_{22}-a_{33}\leqq 2a_{34}\leqq a_{33}$$

die Grenzwerte $\frac{a_{11}+a_{22}-a_{33}}{2}$ und $\frac{a_{33}}{2}$ an. Für beide hat $4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ denselben positiven Wert

$$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{22}a_{44}-a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2.$$

[1]) Im Falle 19. stimmt der Wert von $4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ mit dem desselben Falles unter I. überein.

III.

$a_{12}\geqq 0$, $a_{13}>0$, $a_{14}<0$, $a_{23}\leqq 0$, $a_{24}>0$, $a_{34}<0$.

	$2a_{12}$	$2a_{13}$	$-2a_{14}$	$-2a_{23}$	$2a_{24}$	$-2a_{34}$	$4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$
1.	0	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II.
2.	0	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II.
3.	0	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{33}	II.
4.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	a_{33}	II.
5.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$\begin{cases} 0 \\ a_{11}+a_{22} \\ -a_{33} \end{cases}$	II. *)

	$2a_{12}$	$2a_{13}$	$-2a_{14}$	$-2a_{23}$	$2a_{24}$	$-2a_{34}$	$4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$
6.	a_{11}	0	0	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II.
7.	a_{11}	0	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{33}	I.
8.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	0	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2)+\frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{22})^2$.
9.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	0	I.
10.	a_{11}	a_{11}	0	0	a_{22}	a_{33}	[1])
11.	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	0	a_{33}	I.
12.	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	0	I.
13.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	0	a_{33}	II.
14.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	0	I.
15.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	0	0	I.
16.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II. *)
17.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2)+\frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{22})^2$.
18.	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2)+\frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{22})^2$.
19.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{33}	[1]).
20.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	0	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2)+\frac{1}{2}(a_{11}^2a_{22}a_{33}-a_{11}^3a_{33})+\frac{1}{4}a_{11}^2(a_{22}-a_{11})^2+\frac{1}{4}a_{11}^2a_{33}^2$.
21.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	$a_{22}-a_{11}$	0	I.
22.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	$a_{22}-a_{11}$	a_{33}	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{33}a_{44}\ a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2)+\frac{1}{4}a_{11}^2a_{33}^2$.

*) Nimmt man in Bedingung (8) für μ, ϱ, σ, ν beziehungsweise 1, 2, 3, 4 und setzt für a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24} deren unter 5. und 16. angegebenen Grenzwerte ein, so lautet diese

$$a_{33}-(a_{11}+a_{22})+(-2a_{34})\geqq 0.$$

Jenachdem nun $a_{33}\geqq a_{11}+a_{22}$ oder $a_{33}<a_{11}+a_{22}$ ist, hat man für a_{34} die Grenzwerte 0 und $-\frac{a_{33}}{2}$ oder $-\frac{a_{11}+a_{22}-a_{33}}{2}$ und $-\frac{a_{33}}{2}$; dies ergiebt sich auf dieselbe

Weise, wie unter Voraussetzung II. weil dort $2a_{31}$, hier aber — $2a_{34}$ positiv ist.

[1]) Für die Grenzwerte unter 10. resp. 19. hat $4D - a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ den nämlichen Wert, wie für diejenigen unter 19. resp. 10. der Voraussetzung I.

IV.

$a_{12} \geqq 0$, $a_{13} \geqq 0$, $a_{14} \leqq 0$, $a_{23} \leqq 0$, $a_{24} \leqq 0$, $a_{34} \geqq 0$.

	$2a_{12}$	$2a_{13}$	$2a_{14}$	$2a_{23}$	$-2a_{24}$	$2a_{34}$	$4D - a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$
1.	0	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II.
2.	0	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II.
3.	0	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	$a_{33}-a_{11}$	I.
4.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	$a_{33}-a_{11}$	I.
5.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	[1]).
6.	a_{11}	0	0	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II.
7.	a_{11}	0	a_{11}	0	a_{22}	a_{33}	II.
8.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	0	$a_{33}-a_{11}$	I.
9.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	II.
10.	a_{11}	a_{11}	0	0	a_{22}	a_{33}	[2]).
11.	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	0	a_{33}	I.
12.	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	0	I.
13.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	0	$a_{33}-a_{11}$	I.
14.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	0	II.
15.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	0	0	I.
16.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{11}$	$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{1}^{2}{}_{1}a_{22}a_{44} - a_{11}a_{2}^{2}{}_{2}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{3}^{2}{}_{3}$.
17.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II.
18.	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	a_{33}	III.
19.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	$a_{33}-a_{11}$	[2]).
20.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	0	$a_{33}-a_{11}$	I.
21.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	0	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{1}^{2}{}_{1}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{2}^{2}{}_{2}a_{44} - a_{11}a_{2}^{2}{}_{2}a_{33}) + (a_{1}^{2}{}_{1}a_{2}^{2}{}_{2} - a_{1}^{3}{}_{1}a_{22}) + \frac{1}{4}a_{1}^{4}{}_{1}$.
22.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	$a_{33}-a_{11}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{1}^{2}{}_{1}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{2}^{2}{}_{2}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{3}^{2}{}_{3}) + \frac{1}{4}a_{1}^{2}{}_{1}a_{3}^{2}{}_{3}$.

[1]) Für die unter 5. angegebenen Grenzwerte ist

$$(22)\quad 4D - a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{1_1}^2 a_{22}a_{44} - a_{1_1}^2 a_{22}a_{33} - a_{11}a_{2_2}^2 a_{44} - a_{11}a_{2_2}^2 a_{33} + a_{1_1}^2 a_{2_2}^2.$$

Aus folgenden Formen dieses Ausdrucks

$$a_{11}a_{22}(3a_{33})a_{44} - \tfrac{1}{4}a_{1_1}^2(4a_{22})a_{44} - \tfrac{1}{4}a_{1_1}^2(4a_{22})a_{33} - \tfrac{1}{4}a_{11}a_{22}(4a_{22})a_{44} - \tfrac{1}{4}a_{11}a_{22}(4a_{22})a_{33} + a_{1_1}^2 a_{2_2}^2,$$

und $\frac{1}{4}(a_{1_1}^2 a_{22}(4a_{22}) - a_{1_1}^2 a_{22}(3a_{33})) + (\frac{1}{4}a_{11}a_{22}(12a_{33})a_{44} - \frac{1}{13}a_{1_1}^2(13a_{22})a_{44} - \frac{1}{13}a_{11}a_{22}(13a_{22})a_{33} - \frac{1}{13}a_{11}a_{22}(13a_{22})a_{44} - \frac{1}{52}a_{1_1}^2(13a_{22})a_{33})$

ergiebt sich, dass er positiv ist für

$$3a_{33} \geqq 4a_{22}$$

und für $3a_{33} < 4a_{22}$, aber $12a_{33} \geqq 13a_{22}$.

Da das Verhältnis $\frac{a_{22}}{a_{33}}$ höchstens den Wert der Einheit annehmen kann, so giebt es, wenn nicht gerade der Grenzfall $a_{22} = a_{33}$ vorliegt, immer eine Zahl m, für die

$$ma_{33} \geqq (m+1)a_{22}$$

ist. Durch Wiederholung des eben angewandten Verfahrens wird man aber, wenn auch noch $12a_{33} < 13a_{22}$ sein sollte, immer zu einer Zahl $n \geqq m$ gelangen, für welche der Ausdruck (22) unter der Voraussetzung

$$na_{33} \geqq (n+1)a_{22}$$

positiv erscheint.

Im Grenzfall $a_{22} = a_{33}$ beschränkt sich $4D - a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ auf den positiven Bestandteil

$$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{1_1}^2 a_{22}a_{44} - a_{11}a_{2_2}^2 a_{44} - a_{11}a_{2_2}^2 a_{33}.$$

[2]) Im Falle 10. resp. 19. hat $4D - a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ denselben Wert, wie im Falle 19. resp. 10. unter Voraussetzung I.

V.

$a_{12}>0.\ a_{13}<0,\ a_{14}>0,\ a_{23}<0,\ a_{24}<0,\ a_{34}>0.$

	$2a_{12}$	$-2a_{13}$	$2a_{14}$	$-2a_{23}$	$-2a_{24}$	$2a_{34}$	$4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.
1.	0	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II.
2.	0	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II.
3.	0	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	$a_{33}-a_{11}$	I.
4.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	$a_{33}-a_{11}$	I.
5.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	IV.
6.	a_{11}	0	0	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II.
7.	a_{11}	0	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{33}	I.
8.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	0	a_{33}	III.
9.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	0	I.
10.	a_{11}	a_{11}	0	0	a_{22}	$a_{33}-a_{11}$	I.
11.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	0	a_{33}	II.
12.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	0	II.
13.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	0	$a_{33}-a_{11}$	I.
14.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	0	I.
15.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	0	II.
16.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{11}$	IV.
17.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	a_{33}	III.
18.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	a_{33}	II.
19.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	$a_{33}-a_{11}$	I.
20.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	$a_{33}-a_{11}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{1}^{2}{}_{1}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{2}^{2}{}_{2}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{3}^{2}{}_{3})+\frac{1}{4}a_{1}^{2}{}_{1}(a_{22}+a_{33}-a_{11})^{2}$.
21.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	0	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{1}^{2}{}_{1}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{2}^{2}{}_{2}a_{44}-a_{11}a_{2}^{2}{}_{2}a_{33})+(a_{1}^{2}{}_{1}a_{2}^{2}{}_{2}-a_{1}^{3}{}_{1}a_{22})+\frac{1}{4}a_{1}^{4}{}_{1}$.
22.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	$a_{33}-a_{11}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{1}^{2}{}_{1}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{2}^{2}{}_{2}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{3}^{2}{}_{3})+\frac{1}{4}a_{1}^{2}{}_{1}a_{3}^{2}{}_{3}$.

VI.

$a_{12}\leq 0,\ a_{13}\leq 0,\ a_{14}>0,\ a_{23}\geq 0,\ a_{24}<0,\ a_{34}\geq 0.$

	$-2a_{12}$	$-2a_{13}$	$2a_{14}$	$2a_{23}$	$-2a_{24}$	$2a_{34}$	$4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.
1.	0	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	I.
2.	0	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	I.
3.	0	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	$a_{33}-a_{11}$	I.
4.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	$a_{33}-a_{11}$	I.
5.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	I.*)

	$-2a_{12}$	$-2a_{13}$	$2a_{14}$	$2a_{23}$	$-2a_{24}$	$2a_{34}$	$4D-a_{11}a_{22}a_{33}a.$
6.	a_{11}	0	0	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	I.
7.	a_{11}	0	a_{11}	0	a_{22}	a_{33}	II.
8.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	0	a_{33}	III.
9.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	II.
10.	a_{11}	a_{11}	0	0	a_{22}	a_{33}	III.
11.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	0	a_{33}	II.
12.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{24}	0	II.
13.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	0	$a_{33}-a_{11}$	I.
14.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	0	II.
15.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	0	II.
16.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-(a_{11}+a_{22})$	I.*)
17.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2)+\frac{1}{4}a_{11}^2a_{33}^2.$
18.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2).$
19.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	$a_{33}-a_{11}$	IV.
20.	a_{41}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	$a_{33}-a_{11}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2)+\frac{1}{2}(a_{11}^2a_{22}a_{33}-a_{11}^3a_{22})+\frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{11})^2+\frac{1}{4}a_{11}^2a_{22}^2$
21.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	II.
22.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2)+\frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{22})^2.$

*) Nimmt man in (8) für μ, ϱ, ν, σ beziehungsweise 1, 2, 3, 4 und substituiert dann die unter 5. und 16. angegebenen Grenzwerte von a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, so erhält man für a_{34} die Grenzwerte 0 und $\frac{a_{33}-(a_{11}+a_{22})}{2}$.

Wie unter Voraussetzung I., so existiert offenbar auch hier die Bedingung

$$a_{33} \geq a_{11}+a_{22}.$$

VII.

$a_{12}<0,\ a_{13}<0,\ a_{14}>0,\ a_{23}>0,\ a_{24}>0,\ a_{34}<0.$

	$2a_{12}$	$-2a_{13}$	$2a_{14}$	$2a_{23}$	$2a_{24}$	$2a_{34}$	$4D\ a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$
1.	0	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$a_{33}\ a_{22}$	I.
2.	0	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	I.
3.	0	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{33}	II.
4.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	a_{33}	II.
5.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	IV.
6.	a_{11}	0	0	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	I.
7.	a_{11}	0	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{33}	I.
8.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	0	$a_{33}-a_{11}$	I.
9.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	0	I.
10.	a_{11}	a_{11}	0	0	a_{11}	a_{33}	III.
11.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	0	a_{33}	II.
12.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{11}	0	II.
13.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	0	a_{33}	II.
14.	a_{11}	a_{1}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	0	I.
15.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	0	II.
16.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$a_{33}\ a_{22}$	$3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{22}a_{33}$ $-a_{11}a_{22}^2a_{33}-a_{11}a_{22}a_{33}^2.$
17.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	$a_{33}-a_{22}$	I.
18.	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	VI.
19.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{33}	III.
20.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	a_{33}	II.
21.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	0	V.
22.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	a_{22}	$a_{22}-a_{11}$	$a_{33}+a_{11}$ $-a_{22}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{33}a_{44}$ $-a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2)$ $+\frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{22})^2.$

VIII.

$a_{12}\leqq 0,\ a_{13}\geqq 0,\ a_{14}\leqq 0,\ a_{23}>0,\ a_{24}>0,\ a_{34}<0.$

	$-2a_{12}$	$2a_{13}$	$-2a_{14}$	$2a_{23}$	$2a_{24}$	$-2a_{34}$	$4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$
1.	0	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	I.
2.	0	a_{11}	0	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	I.
3.	0	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{33}	II.
4.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	0	a_{33}	II.
5.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	IV.
6.	a_{11}	0	0	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	I.
7.	a_{11}	0	a_{11}	0	a_{22}	a_{33}	II.
8.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	0	a_{33}	III.

	$-2a_{12}$	$2a_{13}$	$2a_{14}$	$2a_{23}$	$2a_{24}$	$2a_{34}$	$4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.
9.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	0	II.
10.	a_{11}	a_{11}	0	0	a_{22}	$a_{33}-a_{11}$	I.
11.	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	0	a_{33}	I.
12.	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	0	I.
13.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	0	a_{23}	II.
14.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	0	II.
15	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	0	0	I.
16.	0	a_{11}	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	VII.
17.	a_{11}	0	a_{11}	a_{22}	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	VI.
18.	a_{11}	a_{11}	0	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	$a_{33}-a_{22}$	I.
19.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	0	a_{22}	a_{33}	II.
20.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	0	a_{33}	III.
21.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	0	IV.
22.	a_{11}	a_{11}	a_{11}	$a_{22}-a_{11}$	a_{22}	$a_{33}+a_{11}-a_{22}$	$(3a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}^2a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}^2a_{44}-a_{11}a_{22}a_{33}^2)+\frac{1}{4}a_{11}^2(a_{33}-a_{22})^2$.

In diesen Tabellen sind die Werte von $4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ so geschrieben, dass man sie sofort als positiv erkennt.

Bisher ist bewiesen, dass das Produkt $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ mit Ausschluss des Falles $a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}$ für jede reducierte quadratische quaternäre Form kleiner ist als die vierfache Determinante, also auch für eine Form, in der

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}<a_{44}$$

ist. Eine solche liege jetzt vor, und es sei

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=a;\quad a_{44}=a+\eta.$$

Nennt man ferner die Determinante (9), wenn alle Hauptkoefficienten den Wert a haben, D_a, so ist

$$(23)\quad 4D-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=4D_a-a^4+\eta(3a^3-4a_{12}^2a-4a_{13}^2a-4a_{23}^2a+8a_{12}a_{13}a_{23}).$$

Dieser Ausdruck ist positiv für alle Werte von a_{12}, a_{13} und a_{23}, die den Bedingungen (1) bis (8) genügen. Diese Koefficienten seien nun konstant, dagegen a_{44} variabel, indem η sich ändert. Bei abnehmendem η bleibt Ausdruck (23) positiv, wenigstens so lange, als η positiv ist, und kann daher für $\eta=0$ nicht negativ sein. Auch für

$\eta = 0$ ist er entweder noch positiv, oder hat er den Wert 0; keinesfalls ist $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ grösser als die vierfache Determinante D. Da für $\eta = 0$ aber a_{44} den Wert der drei anderen Hauptkoefficienten annimmt, ist nunmehr allgemein erwiesen, dass in reducierten quadratischen quaternären Formen das Produkt der Hauptkoefficienten nicht grösser ist als die vierfache Determinante der Form.

Lebenslauf.

Ich, Johann Peter Bauer, römisch-katholischer Konfession, wurde geboren am 10. Juli 1871 zu Köln als Sohn des Kaufmanns Reiner Bauer und der Regina geb. Doehmer.

Von Ostern 1882 bis 1891 besuchte ich das Marzellen-Gymnasium zu Köln. Nachdem ich an diesem das Reifezeugnis erhalten hatte, bezog ich die Universität Bonn, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren.

Vorlesungen hörte ich bei den Herren Professoren und Docenten:

Hertz †, Kortum, Laspeyres, Lenard, Lipschitz, Lorberg, Ludwig, Martius, J. B. Meyer, Minkowski, Mönnichmeyer, Neuhaueser, Rein, Schaaffhausen †, Strassburger, Voigt.

Thesen.

1. Der Fermatsche Satz hat eine grössere Bedeutung als der Wilsonsche, wiewohl nur der letztere ein Kriterium für eine Primzahl ist.
2. Beim Durchpressen durch anorganische Filter gehen die Lösungen kristalloider Substanzen in ungeänderter Konzentration durch.
3. Die Fähigkeit, durch Reibung elektrisch zu werden, ist allen Körpern eigen.
4. Es wäre wünschenswert, auf Gymnasien mathematische Resultate nur mit ihren Ableitungen vorzutragen und in notwendiger Folge den Lehrstoff der Untersekunda zu beschränken.